Revista Brasileira de Educação e Inovação da Univel
REBEIS



DESENVOLVIMENTO E ANÁLISE DA VIBRAÇÃO DE UM SISTEMA MASSA-MOLA COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE

DEVELOPMENT AND VIBRATION ANALYSIS OF A SPRING-MASS SYSTEM WITH TWO DEGREES OF FREEDOM

Submissão: 29/10/2021
Publicação: 29/11/2021
DOI

Germano Scarabeli Custódio Assunção [1]
Victor Luiz Pavan [2]

Resumo: O presente trabalho traz o desenvolvimento e análise de um sistema massa-mola com dois graus de liberdade (GDL). O objetivo é permitir que o aparato desenvolvido seja aplicado no estudo dos conceitos introdutórios de vibrações, através da integração entre conceitos teóricos e medições práticas. O sistema desenvolvido com duas massas e três molas foi inicialmente analisado do ponto de vista teórico com auxílio do software Matlab e também modelado numericamente no Ansys. Através do software Tracker os dados reais foram obtidos. Com principal resultado observamos que o valores modelados apresentaram boa acurácia em relação aos observados no aparato desenvolvido.

Palavras-Chave: Vibrações Mecânicas. Sistema Massa-Mola. Matlab. Ansys. Tracker.

Abstract: *This work presents the development and analysis of a spring-mass system with two degrees of freedom. The objective is to apply the developed system to study introductory concepts of vibration, through the integration between theoretical and practical concepts. The system developed with two masses and three springs was theoretically analyzed using Matlab and numerically modeled in Ansys. Through the software Tracker, real data were obtained. As main result, we observed that the modeled values had good accuracy in relation to those observed in the developed apparatus.*

keywords: *Vibrações Mecânicas. Sistema Massa-Mola. Matlab. Ansys. Tracker.*

1 INTRODUÇÃO

Os conceitos envolvendo os fenômenos vibratórios são fundamentais no estudo da engenharia, pois de forma geral, onde há movimento, há vibração. Na etapa de desenvolvimento de um projeto de máquina ou estrutura, estas devem ser previstas e

[1] Professor Associado do Centro Universitário Univel. Estudos na École Nationale d'Ingenieurs de Tarbes (ENIT), França. Mestre em Ciências e Engenharia de Petróleo pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). E-mail: germano@univel.br .

[2]Centro Universitário Univel. Técnico em Eletromecânica. Técnico de Laboratório do Centro Universitário Univel. E-mail: victor.pavan@univel.br

quantificados, pois a presença de vibrações a níveis não esperados pode levar à falha crítica e indisponibilidade do bem.

Devido à sua importância, os exemplos de estudos de vibração no desenvolvimento e manutenção de máquinas e estruturas são inúmeros e presentes nas mais variadas áreas. Silva (2012) propõem um método de detecção de falhas em motores elétricos sinais de vibração. Holanda (2016) apresenta um estudo da quantificação de vibração em trens urbanos e uso destes dados no auxílio de manutenção preventiva. Dias, Penteado Neto e Tonetti (2018) mostram como a vibração causada pelas excitações eólicas podem influenciar na vida útil de cabos condutores de energia elétrica. Vargas (2016) faz análise dos impactos da vibração em um centro de usinagem; Nicolau (2017) analisa este mesmo fenômenos em processos de fresagem enquanto Geronel (2018) apresenta estudo de vibrações em máquinas rotativas.

Conforme visto acima, observa-se que a aplicação de vibrações é extensa, entretanto, o estudo vibracional de sistemas é um tema complexo, que quando abordado somente sob a ótica teórica gera dificuldade na compreensão do conteúdo. Para aplicação de conceitos e validação de modelos teóricos, a utilização de bancadas didáticas são instrumentos de grande utilidade para o alinhamento dos conhecimentos teóricos com a realidade das aplicações práticas.

Bühler et al. (2019) afirma que, em um aspecto geral, embora o uso de laboratórios com bancadas de vibrações seja importante na retenção de conhecimento do aluno, as bancadas disponíveis no mercado geralmente são dispendiosas e, portanto, nem sempre se encontram disponíveis nos ambientes de ensino. Deste modo, o desenvolvimento de aparatos e bancadas no próprio local onde ela será aplicada didaticamente têm se mostrado uma alternativa mais econômica e viável.

Neste contexto, Silva, Silva e Irmão (2004) desenvolveram uma bancada didática com o objetivo de simular a realização de procedimentos de balanceamento estático e dinâmico de rotores em uma instituição de ensino. Com medidas coletadas utilizando o sensor de vibrações VIB-42 e a rotina de cálculos desenvolvida no Matlab, concluíram que os resultados obtidos pela bancada servem como parâmetro de avaliação de situações típicas de máquinas rotativas sob condições vibracionais.

Silva (2012) em sua dissertação de mestrado desenvolveu uma bancada para acionamento, aquisição e análise de vibração em máquinas rotativas, permitindo realizar a aquisição dos dados para situação normal de funcionamento e para falhas simuladas. Lima (2014) projetou e construiu de uma bancada didático-experimental, composta por um motor elétrico, um eixo e um volante de massa, para simulação de sinais de vibrações para o estudo da manutenção preditiva, permitindo que o usuário seja capaz de simular as condições de desalinhamento, desbalanceamento e falha em rolamento. Gardim (2018) desenvolveu uma bancada didática para simular o desbalanceamento e desalinhamento em eixos, para permitir ao aluno a identificação de como as anomalias modificam os espectros de vibração de forma prática.

Outros exemplos de bancadas didáticas desenvolvidas para análise de vibrações podem ser encontrados nos trabalhos de Amorim (2006), Leite (2012) e Assis (2019).

Além dos trabalhos citados quem envolvem o desenvolvimento de bancadas didáticas, mas com objetivos de análise para aplicações industriais, há também propostas de aparatos didáticos para análise de vibração de uma forma mais conceitual, através de análise de barras de dimensões limitadas excitadas de forma controlada ou sistemas massa-mola com um ou dois GDL. Embora estes aparatos

sejam mais simples que bancadas didáticas industriais, eles permitem igualmente a observação do fenômeno vibratório e sua modelagem, ou seja, para fins didáticos, facilitam que o discente absorva melhor o conteúdo.

Seguindo a abordagem de desenvolvimento de aparatos do ponto de vista construtivo mais simples, Souza, Cicogna e Chiquito (2007) apresentaram um experimento com motor elétrico de 3 volts rotativo e desbalanceado. Com auxílio de um elástico acoplado ao eixo do motor e com o arcabouço teórico da equação da vibração em cordas, conseguiram identificar as quatro primeiras frequências de naturais do motor desbalanceado.

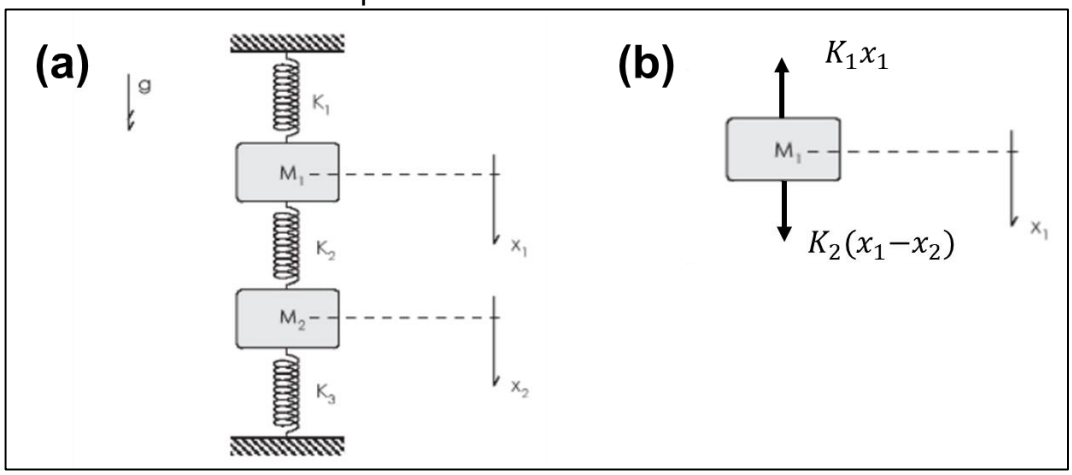
Varanais et al. (2016) utilizaram a plataforma Arduino em conjunto com sensores (acelerômetro, giroscópio e ultrassom) para medição e análise da vibração em uma régua metálica esbelta que foi modelada como uma viga engastada, viga engastada/apoiada e viga biengastada. Além da demonstração de uma instrumentação simples para coleta de dados, o trabalho de Varanais et al. (2016) fez o desenvolvimento analítico do problema analisado e modelou via elementos finitos com auxílio do software Solidworks. Ao comparar os três resultados (coletado, modelado analiticamente e via métodos numéricos) observaram valores correlatos, atestando a viabilidade do experimento proposto. Nesta mesma linha de desenvolvimento, Reis et al. (2018) propuseram um dispositivo de baixo custo para demonstração e análise de ressonância em hastes cilíndricas. No aparato proposto, é possível observar a relação entre a frequência natural de vibração e a geometria/material da haste.

Neste contexto, o objetivo do presente trabalho é ensaiar e modelar um sistema massa-mola com dois GDL sem amortecimento. Um sistema similar ao analisado neste trabalho foi proposto por Bühler et al. (2019), entretanto, ressaltamos que além das diferenças geométricas do sistema (massas, dimensões e rigidezes das molas), uma análise numérica também foi realizada, o que não havia sido feito por Bühler et al. (2019). Desta forma, o presente trabalho possibilita ao aluno integração entre três softwares distintos para análise do problema: Tracker, Matlab e Ansys.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção a modelagem teórica para um sistema massa-mola com dois GDL sem amortecimento é realizada. A Figura 1a abaixo representa um sistema com dois GDL, com duas massas (M_1 e M_2) acopladas via mola com constante elástica K_2. Esse sistema não apresenta excitação forçada e também não possui amortecimento. Do ponto de vista teórico, é um dos exemplos mais simples para se analisar a vibração com dois GDL. Devido a esse acoplamento, o movimento de M_1 interfere em M_2 e vice-versa. Partindo da suposição que esse sistema pode se movimentar apenas ao longo do eixo vertical (o que já é uma simplificação, visto que em sistemas reais ambas massas poderiam se movimentar ao longo dos três eixos — x, y e z), duas variáveis de posição (x_1 e x_2) serão requeridas para caracterizar a vibração a partir da posição inicial do sistema.

Figura 1 - (a) Sistema massa-mola com dois GDL e (b) Diagrama de corpo livre para o corpo com massa M1 do sistema



Fonte: Adaptado de Soleto Junior e França (2006, p. 64).

Para descrever o sistema apresentado na Figura 1a, podemos considerar um diagrama de corpo livre (DCL) para cada massa do sistema — esta análise assim se torna similar à um sistema de 1 GDL. Considere que esse sistema em específico é impulsionado por uma força não-nula no tempo $t = 0$ e depois não é mais perturbado, vibrando de forma livre. A Figura 1b, que apresenta o DCL para M1. Considerando as forças envolvidas em M1 e que $x_2 > x_1$, com base na segunda lei de Newton e baseando no trabalho de Rao (2008), podemos escrever que em qualquer período $t > 0$:

$$\sum F = M_1 \ddot{x}_1 \tag{1}$$

Substituindo as forças conforme apresenta a Figura 1b, temos:

$$-K_1 x_1 + K_2(x_2 - x_1) = M_1 \ddot{x}_1 \tag{2}$$

Assim; temos:

$$M_1 \ddot{x}_1 + K_1 x_1 + K_2(x_1 - x_2) = 0 \tag{3}$$

De modo similar, para a massa M2:

$$M_2 \ddot{x}_2 + K_3 x_3 + K_2(x_2 - x_1) = 0 \tag{4}$$

Observando as equações (3) e (4), podemos concluir que a vibração do sistema pode ser descrita por duas equações diferenciais de segunda ordem acopladas através de K_2.

É comum descrever tais sistemas matricialmente, da seguinte forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{M}} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 + K_3 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{K}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Onde $\boldsymbol{M}$ representa a matriz de massas e $\boldsymbol{K}$ a matriz com as rigidezes das respectivas molas. Assim, nota-se que a solução do sistema matricial apresentado na equação (5) envolve quatro constantes de integração (duas para cada equação de 2° ordem), sendo necessário, portanto, quatro condições de contorno. Nestes casos, é comum o uso das variáveis obtidas no instante $t = 0$ como condição de contorno, por serem condições conhecidas do sistema, sendo denotadas como: $x_1(t = 0) = x_1(0)$; $x_2(t = 0) = x_2(0)$; $\dot{x}_1(t = 0) = \dot{x}_1(0)$ e $\dot{x}_2(t = 0) = \dot{x}_2(0)$.

Para solução do sistema matricial proposto, podemos aplicar uma representação em espaço de estados, que nesta situação, reduz o sistema inicial de duas equações diferenciais de 2° ordem em quatro equações diferenciais de 1° ordem — observe que esta transformação ainda faz necessário o uso de quatro condições de contorno, entretanto, a resposta do problema perpassa pela resolução de um sistema com equações de 1° ordem, mais simples de serem resolvidas.

Aplicando as seguintes transformações $x_1 = y_1;\ x_2 = y_2;\ \dot{x}_1 = y_3;\ \dot{x}_2 = y_4$ e substituindo no sistema apresentado em (5), obtemos o seguinte sistema matricial à ser resolvido:

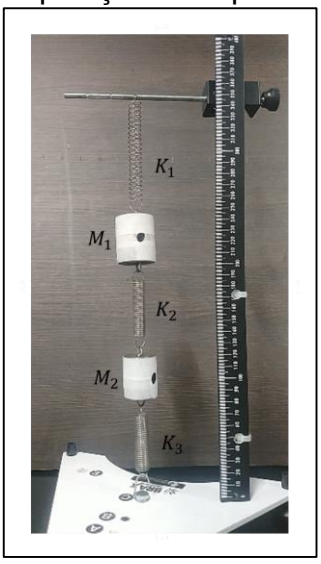
$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ [-\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}] & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Note que a solução do sistema apresentado na equação (6) nos permite determinar os deslocamentos de ambas massas em função do tempo em função das variáveis y_1 e y_2.

3 MATERIAL E MÉTODOS

O sistema vibratório desenvolvido neste trabalho é constituído de duas massas e três molas de aço, conforme apresenta a Figura 2. Para dar sustentação ao sistema, uma barra de aço acoplada à uma régua milimetrada foi usada — a régua permitiu determinar a posição inicial de equilíbrio estático.

Figura 2. Sistema massa-mola com dois graus de liberdade construído neste trabalho na posição de equilíbrio estático



Fonte: Os autores (2021).

A massa $M1$ foi usinada com diâmetro $(35{,}30 \pm 0{,}05)$ mm e altura $(42{,}00 \pm 0{,}05)$ mm e possui massa de $(0{,}313 \pm 0{,}001)$ kg, enquanto a massa M2 foi fabricada com diâmetro $(29{,}90 \pm 0{,}05)$ mm, altura $(35{,}30 \pm 0{,}05)$ mm e possui massa de $(0{,}186 \pm 0{,}001)$ kg. As dimensões das massas foram medidas com o auxílio de um paquímetro de resolução $0{,}05$ mm, enquanto as massas foram medidas com uma balança eletrônica com resolução de medida igual a $0{,}001$ kg.

Na posição de equilíbrio estático mostrada na Figura 2, utilizando a régua milimétrica lateral, foi possível determinar o deslocamento inicial de cada mola como sendo, respectivamente: (85 ± 1) mm para $K1$; (36 ± 1) mm em $K2$ e (100 ± 1) mm para $K3$. Os comprimentos da molas livres de carga foram previamente medidos, sendo: (20 ± 1) mm para $K1$; (16 ± 1) mm em $K2$ e (20 ± 1) mm para $K3$.

Para determinação das constantes elásticas das molas, foram usadas seis posições de deslocamento da mola em relação aos seus comprimentos originais e um peso de $(0{,}900 \pm 0{,}001)$ kg acoplado à balança. Na medida que cada mola era deslocada, este valor da extensão era quantificado e observado o valor registrado na balança. Assim, fazendo-se o valor inicial registrado na balança menos o valor observado após determinada extensão, foi possível determinar a relação entre a força aplicada na mola e sua respectiva extensão. Com estes valores determinados, para cada mola, regressão linear entre força e extensão foi realizada no Matlab para determinar a constante elástica, que foi considerada como sendo a inclinação da reta obtida (seguindo os conceitos da lei de Hooke).

Para determinação da incerteza das constantes elásticas obtidas, calculamos a rigidez da mola para cada amostra e o desvio padrão amostral dividido pela raiz quadrada do número de amostras.

Para análise e coleta dos dados relativos à vibração do sistema, o software livre Tracker foi aplicado. Este software permite a análise do movimento via vídeo, a partir da determinação de um ponto de referência (que no presente trabalho foi considerado como sendo o ponto de 0 mm na régua de referência). Para captura do vídeo do movimento foi usado a câmera do celular padrão. O uso da câmera de celular foi proposital, afim de reproduzir uma condição possível de experimentação.

Para facilitar a identificação das massas M_1 e M_2 pelo Tracker, o experimento foi realizado em um local com fundo escuro e as massas foram revestidas de fita branca, com o centro de massa sinalizado com pontos escuros (Figura 2). Ressaltamos que o software Tracker foi aplicado devido aos resultados satisfatórios observados em Bühler *et al.* (2019).

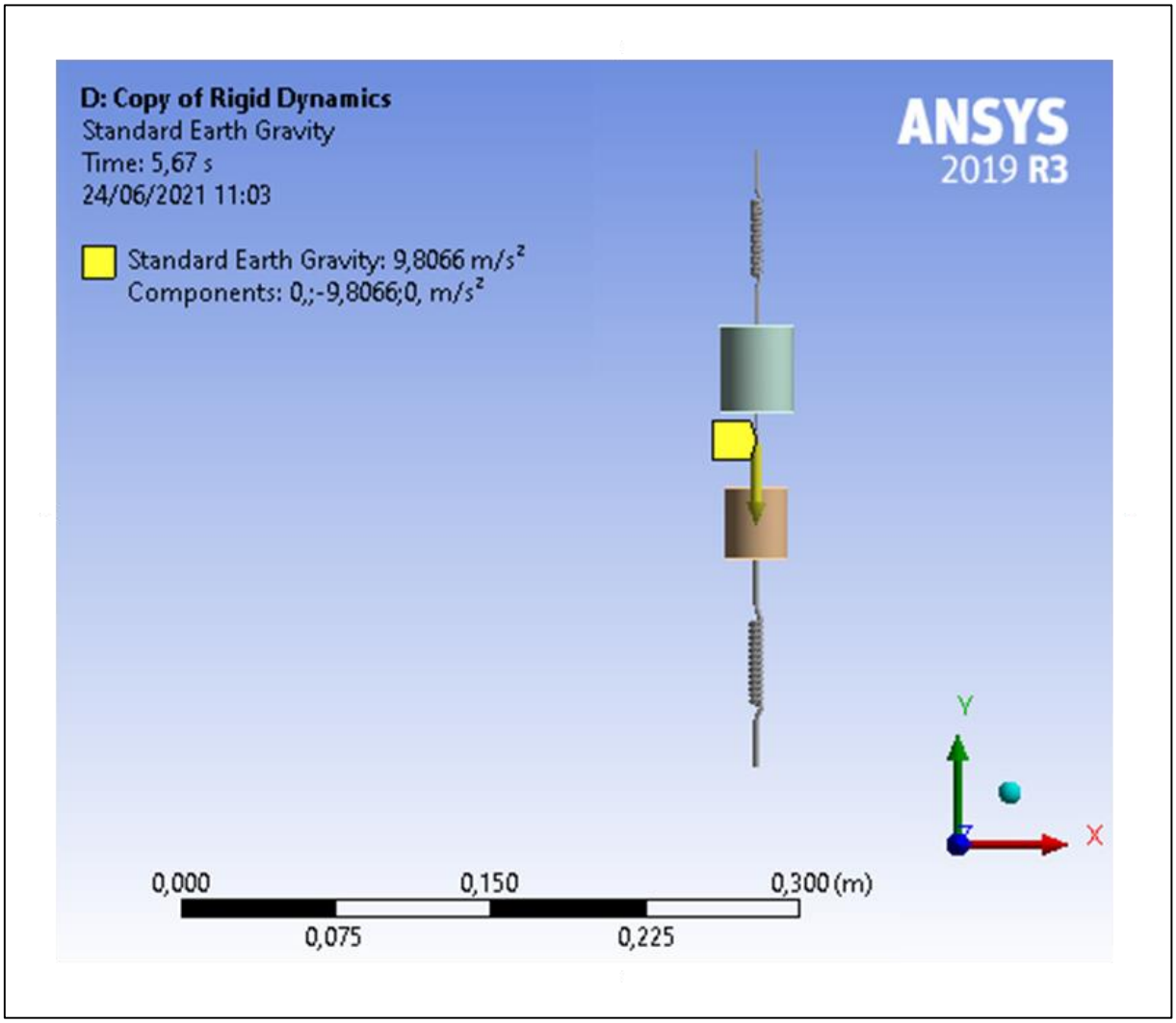
Para modelagem e resolução da equação (6), a função *ode23*[3] foi usada no software Matlab. A resposta gerada nesta rotina foi denominada como "resposta teórica", uma vez que retorna os valores de deslocamento de ambas as massas em função do tempo a partir da análise do DCL do sistema.

Para modelagem no sistema no Ansys, o pacote *Rigid Dynamics* foi aplicado, estabelecendo contato de molas entre as massas conforme a rigidez de cada mola. A Figura 3 apresenta o modelo desenvolvido no Ansys para análise do sistema.

Quando necessário, o valor da aceleração da gravidade adotado em todos os cálculos e procedimentos foi de $9{,}8066\ \frac{m^2}{s}$ (NEWELL e TIESINGA, 2019).

[3] A função *ode23* resolve sistemas na forma $y' = f(t, y)$ ou que envolva matriz de massa na forma $\boldsymbol{M}(t, y)\, y' = f(t, y)$. Maiores detalhes sobre esta função podem ser encontrados em https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/ode23.html.

Figura 3 – Sistema massa-mola modelado no programa Ansys versão 2019 R3



Fonte: Os autores (2021).

4 RESULTADOS

4.1 CÁLCULO DAS CONSTANTES ELÁSTICAS DAS MOLAS

A Tabela 1 apresenta os dados relativos aos ensaios com cada uma das três molas. Através da regressão linear realizada no Matlab, obtivemos os seguintes valores de rigidez: $K1 = (70 \pm 1)$ N/m; $K2 = (71 \pm 2)$ N/m e $K3 = (20{,}6 \pm 0{,}2)$ N/m.

Tabela 1 – Valores obtidos para extensão das molas 1, 2 e 3 em função da força e respectivas incertezas.

Mola 1 ($K1$)			**Mola 2 ($K2$)**			**Mola 3 ($K3$)**		
Extensão	Força	K_{1i}	Extensão	Força (N)	K_{2i}	Extensão	Força (N)	K_{3i}
0,1450	1,0867		0,1450	0,7683		0,1520	0,3525	
0,1530	1,6276	68	0,1545	1,4401	71	0,1685	0,6794	19,8
0,1615	2,2427	72	0,1615	1,9658	75	0,1890	1,0990	20,5
0,1695	2,8056	70	0,1695	2,5535	73	0,2130	1,6008	20,9

0,1855	3,9445	71	0,1845	3,6247	71	0,2335	2,0213	20,5
0,1995	4,8966	68	0,1950	4,3048	65	0,2660	2,6933	20,7
Desvio Padrão		2			4			0,4
Erro Estimado		1			2			0,2

Nota: Todas as unidades estão no S.I.
Fonte: Os autores (2021).

4.2 Condições de Contorno Iniciais

Para análise do modelo proposto, o sistema foi deslocado da sua posição de equilíbrio com auxílio de uma pinça para a posição aleatória $x_1(0) = 18{,}44$ mm e $x_2(0) = 38{,}05$ mm, conforme apresenta a Figura 4a. Nesta configuração, como o sistema se encontra em uma nova posição de equilíbrio estático, as velocidades iniciais são nulas: $\dot{x}_1(0) = 0$ m/s e $\dot{x}_2(0) = 0$ m/s.

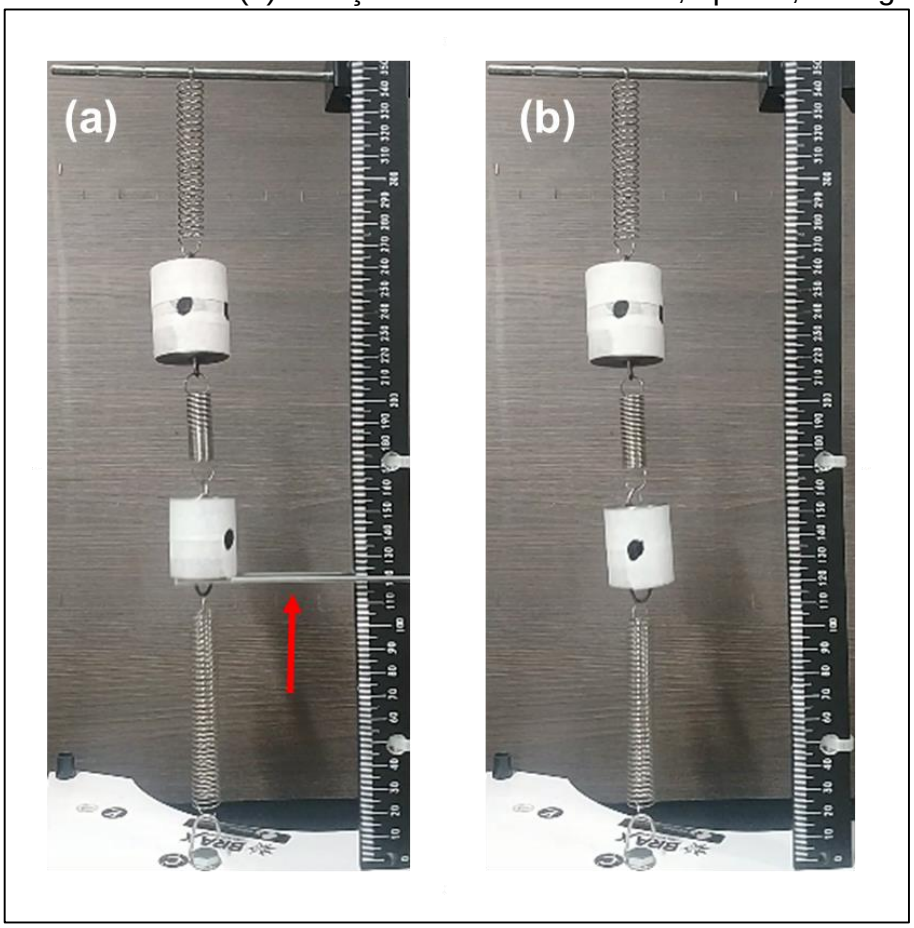
O sistema foi analisado até o tempo 5,67 segundos, que corresponde à um intervalo de 500 vezes o *time step* estabelecido. O *time step* foi definido como sendo o inverso da máxima frequência natural do sistema. A Figura 4b ilustra a posição final após 5,67 segundos de vibração. Podemos observar que ambas as massas apresentaram pouca variação em relação à sua posição inicial (Figura 4a), o que comprava que para este período de tempo, as perdas de energia devido ao arrasto do ar e amortecimento da mola podem ser desprezadas, conforme modelado. Ressaltamos que para períodos de tempo maiores, estas condições devem ser revistas, pois as perdas de energia podem se tornar não desprezíveis.

4.3 Análise Utilizando O Matlab E Ansys

Para resolução teórica do problema, a rotina apresentada na Figura 5a foi desenvolvido no Matlab. É importante ressaltar que embora esta rotina atenda ao presente sistema, ela foi desenvolvida visando permitir analisar outros sistemas similares; bastando alterar somente as massas, constantes elásticas das molas e as condições iniciais.

A função *testodeF_2D (t,y)* foi desenvolvida e apresentada na Figura 5b somente para transformar o formato matricial apresenta pela equação (6) em um formato aplicável à função *ode23*.

Figura 4 - (a) Posição inicial do movimento, com auxílio de uma pinça assinalada pela seta vermelho e (b) Posição final do movimento, após 5,67 segundos



Fonte: Os autores (2021).

Figura 5 - (a) Rotina desenvolvida no software Matlab para resolução teórica do problema e (b) Função *testodeF_2D (t,y)* para auxílio da resolução da rotina

(a)

```
%Dados de massa e rigidez
k1 = 70; k2 = 71; k3 = 20.6;
m1 = 0.313; m2 = 0.186;
%Matrizes
M = [m1 0; 0 m2];
K = [(k1+k2) -k2;-k2 (k2+k3)];
%Calculo da frequência natural
[modeShape, fr]= eig (K,M);
%Condições contorno de forças de excitação
w f1 = 0; F1 = 0;
w f2 = 0; F2 = 0;
%Montagem da matriz conforme Equação (6)
A00 =  zeros (2); A11 = eye (2);
CC = [A00 A11; -inv(M)*K A00];
global CC F1 F2 w_f1 w_f2 M
%Determinação do "time step"
max_freq = max (sqrt (diag(fr))/(2*pi));
dt = 1/(max_freq*20);
time = 0:dt:500*dt;
%Determinação das amplitudes em milímetros
x0 = [0.01844 0.03805 0 0];
[tsol, Xsol*1000]=ode23 ('testodeF_2D', time, x0);
```

(b)

```
function dy = testodeF_2D(t,y)
global CC F1 F2 w_f1 w_f2 M
f1 = F1*sin (2*pi*w_f1*t);
f2 = F2*sin (2*pi*w_f2*t);
A00 = zeros (2);
FF = [A00; inv(M)]*[f1;f2];
    dy = CC*y +FF;
```

Fonte: Os autores (2021).

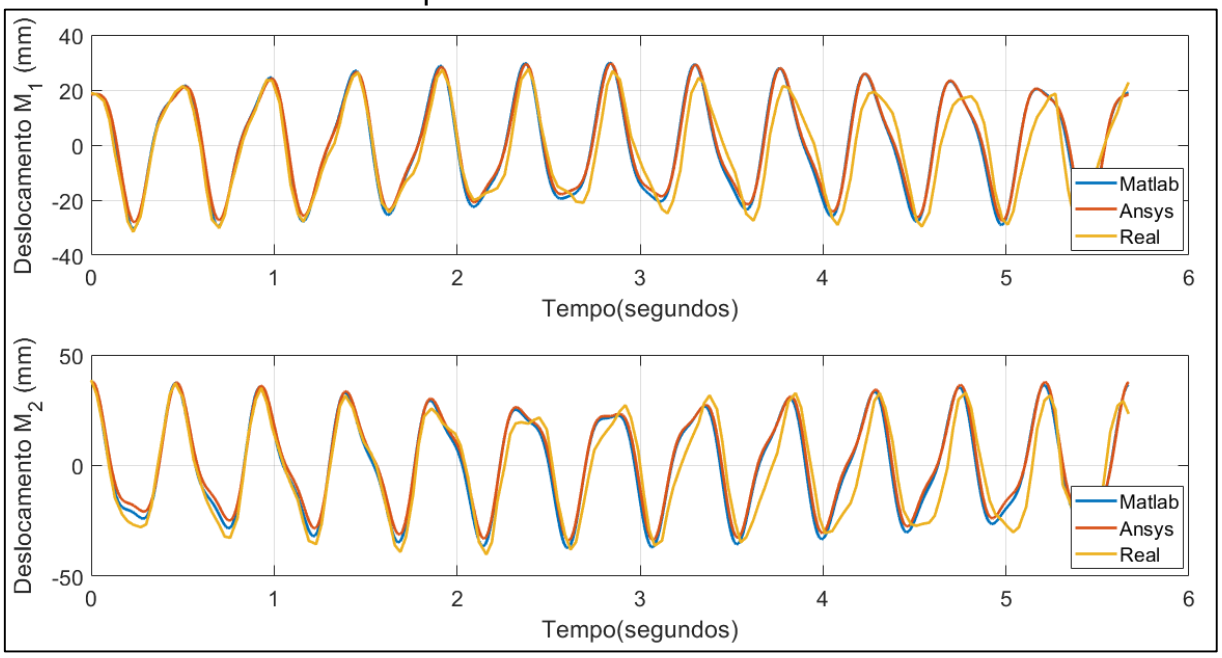
Para determinação da resposta do deslocamento das massas M1 e M2 no software Ansys, a função *Probe Position* foi considerada, usando como referência o centro de massa de cada uma das massas.

Observando a Figura 6, notamos que o deslocamento do centro da massa de M1 e M2 em função do tempo, quando comparamos os valores obtidos via Matlab e Ansys, apresentaram um excelente nível de concordância com a curva real, sendo que os três sistemas modelados apresentaram qualitativamente uma convergência na tendência observada.

Como a condição de contorno inicialmente considerada não tem relação entre um dos modos de vibração, podemos observar na Figura 6 que o sistema vibra como uma combinação dos dois modos. No trecho entre 0 e 2 segundos há uma tendência entre estes vibrarem na mesma fase, enquanto entre os pontos 2 e 4 segundos há uma tendência de vibrarem em fases contrárias. Como é uma vibração livre com frequência diferente da frequência natural, as fases não se encontram defasadas em 180°.

Além disso, podemos notar que como a massa M1 possui praticamente o dobro da massa M2, há uma tendência da massa M2 em se deslocar aproximadamente duas vezes mais, devido à menor inércia. Esse resultado esperado a partir de uma análise teórica é também possível de se observar na Figura 6. Enquanto a massa M1 vibra na faixa entre -20 e 20 mm, a massa M2 vibra na faixa entre -40 e 40 mm.

Figura 6 - Comparação dos deslocamentos entre dados do Matlab, Ansys e Real para as massas M1 e M2.



Fonte: Os autores (2021).

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentamos uma análise teórico-experimental de um sistema vibratório com dois graus de liberdade, após o desenvolvimento e fabricação de um aparato com duas massas e três molas. O sistema foi colocado para vibrar a partir de uma condição inicial aleatória e o deslocamento das massas foi capturado via vídeo e analisado utilizando o software Tracker. Estes valores reais, foram comparados com o modelo teórico do sistema desenvolvido e analisado no software Matlab e com um

modelo numérico desenvolvido no software Ansys. As curvas de amplitude de vibração das massas tiveram valores similares, comprovando a eficácia da análise teórica do sistema e das condições de contorno e premissas estabelecidas.

O sistema proposto, portanto, se apresenta como uma excelente alternativa para estudo de fenômenos vibratórios no ensino de engenharia, possibilitando ao aluno não somente o desenvolvimento teórico do tema, mas a análise de um caso real, através da interação entre diferentes softwares tradicionalmente utilizados no desenvolvimento de projetos.

REFERÊNCIAS

AMORIM, M. J. **Desenvolvimento de uma bancada didático-experimental de baixo custo para aplicações em controle ativo de vibrações**. 2006. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2006.

ASSIS, M. A. de. **Construção de uma bancada didática para estudo das frequências características de engrenagens, rolamentos e desalinhamento**. 2019. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharel em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2019.

BÜHLER, A. J.; LAGO, M.; BERGAMIM, V. G.; DEVES, M. R. Comparação entre simulação e sistema real de vibração com dois graus de liberdade. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, [*s. l.*], v. 41, n. 4, 2019.

CAVALCANTE, L. M. **Estudo das vibrações no processo de fresagem de peças com baixa espessura**. 2017. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2017.

GARDIM, R. **Desenvolvimento de bancada didática de análise de vibrações**. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso (Tecnólogo em Manutenção Industrial) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Guarapuava, 2018.

GERONEL, R. S. **Controle de vibrações em rotores flexíveis utilizando fios de liga com memória de forma**. 2018. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Ilha Solteira, 2018.

HOLANDA, S. M. S. **Aplicação da manutenção preditiva por análise de vibrações em equipamentos de trens urbanos com plano de manutenção proposto**. 2016. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

LEITE, J. A. **Bancada multifuncional para simulação de mecanismos de falhas em máquinas**. 2012. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Guaratinguetá, 2012.

LIMA, I. A. M. de. **Proposição de uma bancada didática para análise de vibração em manutenção preditiva**. 2014. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Automotiva) – Universidade de Brasília, Brasília, 2014.

NEWELL, D. B.; TIESINGA, E. (org.). **The International System of Units (SI):** NIST Special Publication 330*. Gaithersburg:* National Institute of Standards and Technology*., 2019.* https://doi.org/10.6028/NIST.SP.330-2019.

NICOLAU, B. M. **Estudo das vibrações no processo de fresagem de peças com baixa espessura**. 2017. Dissertação (Mestrado em Engenharia Industrial) – Instituto Politécnico de Bragança, Bragança, 2017.

RAO, S. Vibrações mecânicas. 4. ed. São Paulo: Pearson Universidades, 2008.

REIS, R. dos; ITO, P. H. E.; FELICIO, S. E. S.; PAIVA, F. F. Dispositivo para estudo de ressonância e elasticidade em hastes cilíndricas. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, [*s. l.*], v. 40, n. 4, 2018.

SILVA, R. M. K. **Bancada didática para manutenção preditiva utilizando análise de vibrações**. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharel em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2018.

SILVA, S. E. L.; SILVA, A. A.; IRMÃO, M. A. S. Análise teórico-experimental de bancada didática para balanceamento estático e dinâmico de rotores. *In:* CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA – COBENGE, 32., 2004, Brasília. **Anais [...]**. Brasília: Associação Brasileira de Educação em Engenharia, 2004.

SILVA, V. A. D. **Detecção de falhas em motores elétricos através das máquinas de vetores de suporte**. 2012. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2012.

SOLETO JUNIOR, J.; FRANÇA, L. Introdução às vibrações mecânicas. 1. ed. São Paulo: Blucher, 2006.

SOUZA, M. G. de; CICOGNA, T. R.; CHIQUITO, A. J. Excitação dos modos normais de um sistema usando um motor desbalanceado. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, [*s. l.*], v. 29, n. 1, 2007.

TONETTI, M.; PENTEADO NETO, R. de A.; DIAS, D. dos S. Análise da vida útil de cabos condutores de energia elétrica em linhas de transmissão aéreas. **Revista Técnico-Científica do Crea-PR**, Paraná, 13. ed., 2018.

VARANIS, M.; SILVA, A. L.; BRUNETTO, P. H. A.; GREGOLIN, R. F. Instrumentation for mechanical vibrations analysis in the time domain and frequency domain using the Arduino platform. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, [*s. l.*], v. 38, n. 1, 2016.

VARGAS, B. R. de M. **Análises numérica e experimental de vibrações do conjunto eixo-árvore de um centro de usinagem**. 2016. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2016.